

关于现版高中数学（必修第一册）基本不等式相关内容习题的参考解答

2026-08-27

不等式

高中数学

习题解答

均值不等式

柯西不等式

作者：罗逸琳

单位：廉中自然科学局第207研究所（2606班）

日期：2026年8月27日

摘要

本文选取现版高中数学（必修第一册）第二章“基本不等式”相关内容中的五道典型习题，每道题均提供两种及以上不同的解法，旨在帮助读者拓宽解题思路，加深对基本不等式变形技巧的理解。本文的理论基础可参考笔者此前发表的《高中常见基本不等式的变形应用》一文 [1]。

关键词：基本不等式；均值不等式；柯西不等式；习题解答；多解法

引用文献

[1] 罗逸琳. 高中常见基本不等式的变形应用[EB/OL]. 廉中自然科学局第207研究所, 2026. <https://gitee.com/buelierm/Apart207/>

预备知识

本文涉及的核心不等式：

均值不等式：对任意正实数 a, b ，有

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

当且仅当 $a = b$ 时等号成立。

柯西不等式（二维形式）：对任意实数 a, b, c, d ，有

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

当且仅当 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ 时等号成立。

更多变形技巧请参考文献 [1]。

习题一

题目

已知 $x > 0, y > 0$ ，且 $x + y = 1$ ，求 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值。

解法一：均值不等式（“1的代换”）

将 $x + y = 1$ 代入目标式：

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{x} + \frac{x+y}{y} = 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

由均值不等式， $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}} = 2$ ，当且仅当 $\frac{y}{x} = \frac{x}{y}$ ，即

$x = y = \frac{1}{2}$ 时等号成立。

因此 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2 + 2 = 4$, 最小值为 4。

解法二：柯西不等式

由柯西不等式：

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x + y) \geq \left(\sqrt{\frac{1}{x} \cdot x} + \sqrt{\frac{1}{y} \cdot y}\right)^2 = (1 + 1)^2 = 4$$

因为 $x + y = 1$, 所以 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 4$ 。

等号成立条件： $\frac{1/x}{x} = \frac{1/y}{y}$, 即 $x^2 = y^2$, 结合 $x, y > 0$ 得 $x = y = \frac{1}{2}$ 。

最小值为 4。

解法三：消元法 + 均值不等式

由 $x + y = 1$ 得 $y = 1 - x$, 其中 $0 < x < 1$ 。

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x(1-x)}$$

而 $x(1-x) \leq \left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 当且仅当 $x = 1-x$, 即 $x = \frac{1}{2}$ 时取等。

因此 $\frac{1}{x(1-x)} \geq 4$, 最小值为 4。

习题二

题目

已知 $x > 0$, 求 $x + \frac{4}{x}$ 的最小值。

解法一：均值不等式

直接应用均值不等式：

$$x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 2\sqrt{4} = 4$$

当且仅当 $x = \frac{4}{x}$, 即 $x = 2$ ($x > 0$) 时等号成立。

最小值为 4。

解法二：配方法

$$x + \frac{4}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 + 4$$

因为 $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0$, 所以 $x + \frac{4}{x} \geq 4$ 。

当且仅当 $\sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}$, 即 $x = 2$ 时取等。

最小值为 4。

解法三：导数法

设 $f(x) = x + \frac{4}{x}$ ($x > 0$) , 则

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x^2 = 4$, 即 $x = 2$ ($x > 0$) 。

当 $0 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增。

故 $x = 2$ 为极小值点，也是最小值点， $f(2) = 2 + \frac{4}{2} = 4$ 。

最小值为 4。

习题三

题目

已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $a + b = 2$, 求 ab 的最大值。

解法一：均值不等式

由均值不等式：

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \left(\frac{2}{2} \right)^2 = 1$$

当且仅当 $a = b = 1$ 时等号成立。

最大值为 1。

解法二：消元法 + 二次函数

由 $a + b = 2$ 得 $b = 2 - a$, 其中 $0 < a < 2$ 。

$$ab = a(2 - a) = -a^2 + 2a = -(a - 1)^2 + 1$$

这是开口向下的二次函数，当 $a = 1$ 时取得最大值 1，此时 $b = 1$ 。

最大值为 1。

解法三：三角换元

设 $a = 2 \cos^2 \theta$, $b = 2 \sin^2 \theta$, 其中 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 。

$$ab = 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \sin^2(2\theta)$$

因为 $\sin^2(2\theta) \leq 1$, 当且仅当 $2\theta = \frac{\pi}{2}$, 即 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时取等, 此时 $a = b = 1$ 。

最大值为 1。

习题四

题目

已知 $x > 1$, 求 $x + \frac{1}{x-1}$ 的最小值。

解法一：均值不等式（凑项）

将表达式变形为：

$$x + \frac{1}{x-1} = (x-1) + \frac{1}{x-1} + 1$$

因为 $x > 1$, 所以 $x-1 > 0$ 。由均值不等式：

$$(x-1) + \frac{1}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} = 2$$

当且仅当 $x-1 = \frac{1}{x-1}$, 即 $(x-1)^2 = 1$, $x = 2$ 时等号成立。

因此 $x + \frac{1}{x-1} \geq 2 + 1 = 3$, 最小值为 3。

解法二：换元法

令 $t = x - 1$, 则 $t > 0$, $x = t + 1$ 。

$$x + \frac{1}{x-1} = t + 1 + \frac{1}{t} = \left(t + \frac{1}{t}\right) + 1$$

由均值不等式, $t + \frac{1}{t} \geq 2$, 当且仅当 $t = 1$ 时取等, 此时 $x = 2$ 。

故最小值为 $2 + 1 = 3$ 。

解法三：导数法

设 $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$ ($x > 1$) , 则

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $(x-1)^2 = 1$, 即 $x = 2$ ($x > 1$) 。

当 $1 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$ 。

故 $x = 2$ 为最小值点, $f(2) = 2 + \frac{1}{2-1} = 3$ 。

最小值为 **3**。

习题五

题目

已知 $x > 0$, $y > 0$, 且 $2x + y = 1$, 求 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y}$ 的最小值。

解法一：均值不等式（“1的代换”）

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} \right) (2x + y) = 2 + \frac{y}{x} + \frac{4x}{y} + 2 = 4 + \frac{y}{x} + \frac{4x}{y}$$

由均值不等式：

$$\frac{y}{x} + \frac{4x}{y} \geq 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{4x}{y}} = 2\sqrt{4} = 4$$

当且仅当 $\frac{y}{x} = \frac{4x}{y}$, 即 $y^2 = 4x^2$, 结合 $x, y > 0$ 得 $y = 2x$ 。代入

$2x + y = 1$ 得 $4x = 1$, 即 $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$ 。

因此 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} \geq 4 + 4 = 8$, 最小值为 8。

解法二：柯西不等式

由柯西不等式：

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} \right) (2x + y) \geq \left(\sqrt{\frac{1}{x} \cdot 2x} + \sqrt{\frac{2}{y} \cdot y} \right)^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{2})^2 = (2\sqrt{2})^2 =$$

因为 $2x + y = 1$, 所以 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} \geq 8$ 。

等号成立条件： $\frac{1/x}{2x} = \frac{2/y}{y}$, 即 $y^2 = 4x^2$, $y = 2x$, 得 $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$ 。

最小值为 8。

解法三：消元法

由 $2x + y = 1$ 得 $y = 1 - 2x$, 其中 $0 < x < \frac{1}{2}$ 。

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{2}{1-2x} = \frac{1-2x+2x}{x(1-2x)} = \frac{1}{x(1-2x)}$$

令 $f(x) = x(1-2x) = -2x^2 + x = -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}$ 。

当 $x = \frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{8}$, 此时 $\frac{1}{f(x)}$ 取得最小值 8。

对应 $y = 1 - 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ 。

最小值为 8。

方法总结

题目	解法一	解法二	解法三	最小值/最大值
习题一	均值不等式 (1的代换)	柯西不等式	消元法	4
习题二	均值不等式	配方法	导数法	4
习题三	均值不等式	消元法+二次函数	三角换元	1 (最大值)
习题四	均值不等式 (凑项)	换元法	导数法	3
习题五	均值不等式 (1的代换)	柯西不等式	消元法	8

解题策略建议

- “1的代换”**：当条件为线性等式 (如 $x + y = 1$) , 目标为分式和时, 优先考虑将条件式乘入目标式, 构造均值不等式。
- 凑项/换元**：当目标式可变形为 $A + \frac{k}{A}$ 的形式时, 通过凑项或换元使两项乘积为定值。

3. **柯西不等式**：当目标式与条件式可对应为柯西形式时，柯西不等式往往一步到位。
4. **导数法**：作为通用方法，适用于所有可导函数，但计算量较大，建议作为验证手段。
5. **消元法**：将二元问题化为一元问题，结合二次函数或均值不等式求解。

更多变形技巧的系统总结请参考文献 [1]。

参考文献

[1] 罗逸琳. 高中常见基本不等式的变形应用[EB/OL]. 廉中自然科学局第207研究所, 2026.