

高中常见基本不等式的变形应用

2026-08-26

不等式

高中数学

均值不等式

柯西不等式

变形技巧

作者：罗逸琳

单位：廉中自然科学局第207研究所（2606班）

通讯作者：罗逸琳 (yydshmcl@outlook.com)

摘要

不等式是高中数学的重要组成部分，也是高考与竞赛中的高频考点。基本不等式看似形式简单，但其变形方式灵活多样，往往是解题的关键所在。本文系统梳理了高中阶段几种常见基本不等式——包括完全平方不等式、均值不等式（AM-GM）、柯西不等式、三角不等式与排序不等式——的标准形式与取等条件，并重点讨论它们的变形应用技巧。通过“1的代换”“凑项凑系数”“分离常数”“换元转化”“与函数结合”等典型方法的例题分析，揭示基本不等式变形应用的内在规律，为高中数学学习者提供系统的解题思路与方法参考。

关键词：基本不等式；均值不等式；柯西不等式；变形技巧；最值问题

1. 引言

不等式贯穿于高中数学的各个模块，从函数的定义域与值域、数列的极限，到解析几何中的距离与范围问题，不等式都扮演着不可或缺的角色。其中，基本不等式由于其形式简洁、应用广泛，成为了不等式学习中的核心内容。

然而，在实际解题中，直接套用基本不等式的标准形式往往难以奏效，题目通常需要对已知条件进行适当的变形，使之满足基本不等式的使用条件。这种“变形”能力正是许多学生感到困难的地方。

本文旨在系统总结高中常见基本不等式的变形方法，通过典型例题展示各种变形技巧的应用场景与操作步骤，帮助读者建立起“条件—变形—应用”的解题思维链。

2. 几种常见基本不等式

2.1 完全平方不等式

完全平方不等式是最基本的不等式，其形式为：

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (1)$$

其中 $a, b \in \mathbb{R}$ ，当且仅当 $a = b$ 时取等号。

推论：由 (1) 可得 $(a + b)^2 \geq 4ab$ ，即 $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ 。

完全平方不等式的本质是 $(a - b)^2 \geq 0$ ，它是所有不等式的基础。

2.2 均值不等式 (AM-GM)

对于正实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，算术平均数不小于几何平均数：

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (2)$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 时取等号。

高中阶段最常用的是二元和三元形式：

- 二元： $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ($a, b > 0$)
- 三元： $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ ($a, b, c > 0$)

均值不等式的使用需满足“一正、二定、三相等”三个条件。

2.3 柯西不等式

柯西不等式的标准形式为：

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \quad (3)$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ ($b_i \neq 0$) 时取等号。

二元形式: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$ 。

柯西不等式的核心思想是“平方和的乘积不小于乘积和的平方”，在处理含平方项与交叉项的问题时极为有效。

2.4 三角不等式

对于任意实数 a, b :

$$|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b| \quad (4)$$

右侧当且仅当 $ab \geq 0$ (取加号) 或 $ab \leq 0$ (取减号) 时取等号。

三角不等式在处理含绝对值的最值与证明问题中有着重要应用。

2.5 排序不等式

设 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$, 则:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i} \leq \sum_{i=1}^n a_i b_{j_i} \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad (5)$$

即“逆序和 $\leq$ 乱序和 $\leq$ 顺序和”。

排序不等式在处理多变量对称不等式与比较大小时有独特优势。

3. 基本不等式的变形技巧

3.1 “1的代换”

“1的代换”是均值不等式中最经典的变形技巧。当已知条件中存在和为定值 (如 $a + b = 1$)，而目标式为分式求和时，将目标式乘以“1” (即已知条件的和)，展

开后即可使用均值不等式。

例题 1: 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 1$, 求 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值。

解:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} + \frac{4}{b} &= \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right)(a + b) \\&= 1 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} + 4 \\&= 5 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \\&\geq 5 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{4a}{b}} \\&= 5 + 2 \times 2 = 9\end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{4a}{b}$, 即 $b = 2a$, 结合 $a + b = 1$ 得 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$ 时取等号。

故最小值为 $\boxed{9}$ 。

点评: 本题的关键在于将 $(a + b)$ 这个“1”乘到目标式上, 构造出可用均值不等式的 $\frac{b}{a} + \frac{4a}{b}$ 形式。

3.2 凑项与凑系数

当目标式与基本不等式的形式存在差异时, 通过添加或拆分项、调整系数, 使之满足“和为定值”或“积为定值”的条件。

例题 2: 已知 $x > \frac{1}{2}$, 求函数 $f(x) = 4x - 2 + \frac{1}{4x-2}$ 的最小值。

解: 令 $t = 4x - 2$, 由 $x > \frac{1}{2}$ 知 $t > 0$ 。

$$f(x) = t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 2$$

当且仅当 $t = \frac{1}{t}$, 即 $t = 1, 4x - 2 = 1, x = \frac{3}{4}$ 时取等号。

故最小值为 $\boxed{2}$ 。

点评：本题通过换元将 $4x - 2$ 视为整体，直接使用 $t + \frac{1}{t} \geq 2$ 。换元本质上是一种“凑项”，使复杂表达式简化为标准形式。

例题 3：已知 $0 < x < \frac{1}{3}$ ，求 $y = x(1 - 3x)$ 的最大值。

解：

$$y = x(1 - 3x) = \frac{1}{3} \cdot 3x(1 - 3x)$$

由 $0 < x < \frac{1}{3}$ 知 $3x > 0$ ， $1 - 3x > 0$ ，且 $3x + (1 - 3x) = 1$ 为定值。

$$3x(1 - 3x) \leq \left(\frac{3x + 1 - 3x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$y \leq \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

当且仅当 $3x = 1 - 3x$ ，即 $x = \frac{1}{6}$ 时取等号。

故最大值为 $\boxed{\frac{1}{12}}$ 。

点评：本题的关键是“凑系数”——将 x 改写为 $\frac{1}{3} \cdot 3x$ ，使 $3x$ 与 $(1 - 3x)$ 的和为定值 1，从而满足均值不等式的使用条件。

3.3 分离常数

当目标式为分子分母均含变量的分式时，通过分离常数将其转化为“整式 + 分式”的形式，再使用基本不等式。

例题 4：已知 $x > -1$ ，求 $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ 的最小值。

解：

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1} \\ &= \frac{(x + 1)^2 + (x + 1) + 1}{x + 1} \\ &= (x + 1) + 1 + \frac{1}{x + 1} \end{aligned}$$

由 $x > -1$ 知 $x + 1 > 0$, 令 $t = x + 1 > 0$:

$$y = t + \frac{1}{t} + 1 \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} + 1 = 3$$

当且仅当 $t = \frac{1}{t}$, 即 $t = 1, x = 0$ 时取等号。

故最小值为 $\boxed{3}$ 。

点评: 分离常数的核心是将分子配凑为含分母的多项式, 从而拆分出整式部分。本题中将 $x^2 + 3x + 3$ 配为 $(x + 1)^2 + (x + 1) + 1$, 是关键步骤。

3.4 柯西不等式的变形应用

柯西不等式的变形极为丰富, 常见的有以下几种形式:

变形一 (分式型) :

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \quad (b_i > 0) \quad (6)$$

这是柯西不等式最常用的变形, 称为“柯西分式不等式”或“Titu引理”。

例题 5: 已知 $a, b, c > 0$, 且 $a + b + c = 1$, 求证:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{1}{2}$$

证明: 由柯西分式不等式 (6):

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b) + (b+c) + (c+a)} = \frac{1}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}$$

当且仅当 $\frac{a}{a+b} = \frac{b}{b+c} = \frac{c}{c+a}$, 即 $a = b = c = \frac{1}{3}$ 时取等号。

故原不等式成立。■

变形二 (向量型) :

设 $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 则 $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, 即柯西不等式的向量形式。

例题 6: 求函数 $y = 3\sqrt{x-1} + 4\sqrt{5-x}$ 的最大值。

解: 函数定义域为 $[1, 5]$ 。设 $\vec{a} = (3, 4)$, $\vec{b} = (\sqrt{x-1}, \sqrt{5-x})$, 则:

$$y = \vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{(x-1) + (5-x)} = 5 \times 2 = 10$$

当且仅当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向, 即 $\frac{\sqrt{x-1}}{3} = \frac{\sqrt{5-x}}{4}$, 解得 $x = \frac{61}{25} \in [1, 5]$ 时取等号。

故最大值为 $\boxed{10}$ 。

点评: 将目标式视为两个向量的内积, 利用柯西不等式的向量形式一步到位。关键在于构造合适的向量, 使其中一个向量的模为定值。

3.5 与函数单调性结合

当基本不等式的取等条件不在定义域内时, 需结合函数的单调性求解。

例题 7: 求函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在 $x \in [2, +\infty)$ 上的最小值。

分析: 由均值不等式, $x + \frac{1}{x} \geq 2$, 取等条件为 $x = 1$ 。但 $1 \notin [2, +\infty)$, 故等号取不到, 需用单调性。

解: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ 。当 $x \geq 2$ 时, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$, 故 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增。

$$f(x)_{\min} = f(2) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

故最小值为 $\boxed{\frac{5}{2}}$ 。

点评: 使用基本不等式求最值时, 必须验证取等条件是否在定义域内。若不在, 则基本不等式只能给出下界 (不一定能取到), 需改用单调性或其他方法。

3.6 多次使用基本不等式

某些复杂问题需要多次使用基本不等式，此时需特别注意各次取等条件的一致性。

例题 8：已知 $a, b > 0$ ，求 $(a + \frac{1}{a})(b + \frac{1}{b})$ 的最小值，其中 $a + b = 1$ 。

解：

$$\begin{aligned}\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right) &= ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{1}{ab} \\&= ab + \frac{1}{ab} + \frac{a^2 + b^2}{ab} \\&= ab + \frac{1}{ab} + \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} \\&= ab + \frac{1}{ab} + \frac{1}{ab} - 2 \\&= ab + \frac{2}{ab} - 2\end{aligned}$$

由 $a + b = 1$ ， $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ，即 $0 < ab \leq \frac{1}{4}$ 。

令 $t = ab \in (0, \frac{1}{4}]$ ，则 $g(t) = t + \frac{2}{t} - 2$ 。

$g'(t) = 1 - \frac{2}{t^2} < 0$ 对 $t \in (0, \frac{1}{4}]$ 恒成立，故 $g(t)$ 在 $(0, \frac{1}{4}]$ 上单调递减。

$$g(t)_{\min} = g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + 8 - 2 = \frac{25}{4}$$

当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时取等号。

故最小值为 $\boxed{\frac{25}{4}}$ 。

点评：本题先展开化简，再利用 $a + b = 1$ 消元，将问题转化为单变量函数。注意此处不能直接对 $ab + \frac{2}{ab}$ 使用均值不等式（取等条件 $ab = \sqrt{2}$ 超出范围），需结合单调性。

4. 综合应用

4.1 证明不等式

例题 9: 已知 $a, b, c > 0$, 求证:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

(Nesbitt 不等式)

证明: 方法一 (柯西分式不等式):

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a^2}{a(b+c)} + \frac{b^2}{b(c+a)} + \frac{c^2}{c(a+b)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

又 $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$, 故:

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} = \frac{3}{2}$$

当且仅当 $a = b = c$ 时取等号。■

方法二 (排序不等式): 不妨设 $a \geq b \geq c > 0$, 则 $b+c \leq c+a \leq a+b$, 即

$$\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}.$$

由排序不等式, 顺序和最大:

$$S = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

$$S \geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b}$$

$$S \geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}$$

三式相加:

$$3S \geq \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3 + 3$$

化简即得 $S \geq \frac{3}{2}$ 。■

4.2 求参数范围

例题 10：已知不等式 $x + \frac{a}{x} \geq 4$ 对一切 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。

解：当 $a \leq 0$ 时， $x + \frac{a}{x}$ 在 $x \rightarrow 0^+$ 时趋于 $-\infty$ ，不满足条件。

当 $a > 0$ 时，由均值不等式：

$$x + \frac{a}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{a}{x}} = 2\sqrt{a}$$

当且仅当 $x = \sqrt{a}$ 时取等号。

要使不等式恒成立，需 $2\sqrt{a} \geq 4$ ，即 $\sqrt{a} \geq 2$ ， $a \geq 4$ 。

故 a 的取值范围为 $[4, +\infty)$ 。

5. 变形技巧总结

通过以上例题分析，可将基本不等式变形应用的常用技巧总结如下：

技巧	适用场景	关键操作
1的代换	已知和为定值，目标为分式和	乘以“1”后展开
凑项	目标式与标准形式差常数项	加减常数项配凑
凑系数	积不为定值，需调整系数	乘除常数使和/积为定值
分离常数	分子分母均含变量的分式	分子配凑为含分母的多项式
换元	表达式复杂，含重复结构	令重复部分为新变量
柯西变形	含平方和与乘积和	构造柯西形式（分式型/向量型）
单调性结合	取等条件不在定义域内	求导判断单调性，取端点值
多次使用	复杂多变量问题	逐步化简，注意取等条件一致性

解题思维链：

1. **审题**：明确已知条件与目标式，判断变量范围
2. **选式**：根据目标式结构选择合适的基本不等式
3. **变形**：运用上述技巧将目标式转化为标准形式
4. **验证**：检查“一正二定三相等”，确认取等条件可达
5. **结论**：给出最值或证明结论

6. 注意事项

1. **取等条件**：使用基本不等式求最值时，必须验证等号能否取到。若取等条件不在定义域内，需改用单调性等方法。
2. **多次使用**：多次使用基本不等式时，各次取等条件必须一致，否则最终等号无法同时取到。
3. **符号问题**：均值不等式要求变量为正，若变量为负，需先取绝对值或换元。
4. **定值条件**：均值不等式要求“和为定值”或“积为定值”，变形的核心就是构造定值。
5. **柯西的方向**：柯西不等式给出的是下界（平方和乘积 $\geq$ 乘积和平方），注意目标式的方向是否匹配。

7. 结论

基本不等式的变形应用是高中数学不等式模块的核心能力。本文系统讨论了完全平方不等式、均值不等式、柯西不等式、三角不等式与排序不等式的标准形式，并通过典型例题展示了“1的代换”“凑项凑系数”“分离常数”“换元”“柯西变形”“单调性结合”等变形技巧的应用。

掌握基本不等式变形应用的关键在于：一是熟悉各种基本不等式的形式与取等条件，二是积累变形技巧并能根据题目特征灵活选用，三是养成验证取等条件的良好习惯。通过大量练习与总结归纳，读者定能熟练掌握基本不等式的变形应用，在高中数学学习与考试中得心应手。

致谢

感谢陈益达长官在研究方向上的指导，感谢张铭业工程师在理论验证方面的帮助，感谢207研究所全体成员的讨论与建议。

参考文献

- [1] 人民教育出版社. 普通高中教科书·数学（必修第一册）[M]. 北京：人民教育出版社，2019.
- [2] 人民教育出版社. 普通高中教科书·数学（选择性必修第二册）[M]. 北京：人民教育出版社，2020.
- [3] 华罗庚. 数学归纳法[M]. 北京：科学出版社，2002.
- [4] 陈计，季潮丞. 代数不等式[M]. 上海：上海科技教育出版社，2009.
- [5] Nesbitt A M. Problem 15114[J]. Educational Times, 1903, 56: 67.
- [6] Cauchy A L. Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique[M]. Paris: Debure frères, 1821.

授权

本文采用 [CC BY-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.zh) (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.zh>) 协议授权。您可以自由地共享、改编本文，但需注明作者和来源，并以相同协议分发。